7.2　質点系の角運動量と力のモーメント

　１個の質点の場合については５章で詳しく扱った。そこでは、ある点の周りの角運動量を $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, 力のモーメントを$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ とすると、回転の運動方程式、$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ （式5-4-1）が成り立つことを示した。力のモーメントがゼロであれば、角運動量は保存する（回転の慣性）。逆に、力のモーメントがあれば角運動量は時間変化する。すなわち、「力のモーメント」とは回転の状態を変化させる原因となるものであった。

　２個の質点の場合については演習10問題３で扱っている。そこでは、二つの質点の角運動量をたしたもの $\mathbf{L}_{tot}=\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ の時間変化は、内力にはよらずに、それぞれの質点に働く「外力のモーメント」の和 $\mathbf{N}_{tot}^{ex}=\mathbf{N}_1^{ex}+\mathbf{N}_2^{ex}$ で決まる。すなわち、

（二つの質点の場合）　$$\mathbf{N}_{tot}^{ex}=\frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \tag{7-2-1}$$

これは、「全運動量の時間変化が内力によらずに外力の総和のみで決まる」（$\mathbf{F}_{tot}^{ex}=\frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt}$）のと同じ状況である。

　では、「n個の質点からなる系」ではどうなるであろうか。まず、全角運動量と外力による力のモーメントの総和を以下のように定義する。

（全角運動量）　$$\mathbf{L}_{tot}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{L}_i=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i) \tag{7-2-2}$$

（外力のモーメントの総和）

$$\mathbf{N}_{tot}^{ex}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i^{ex}=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{ex}) \tag{7-2-3}$$

ここで、$\mathbf{p}_i, \mathbf{L}_i, \mathbf{F}_i^{ex}, \mathbf{N}_i^{ex}$はそれぞれ$i$ 番目の質点に関する運動量、原点の周りの角運動量、外力、外力による原点の周りの力のモーメントである。また、$\mathbf{r}_i$ は原点から i 番目の質点へ向かう位置ベクトルである[1]。このとき、系全体の回転の運動方程式は、やはり式(7-2-1)と同じ形に書ける事を示せる。あらためて書くと、

（n個の質点の場合）　$$\mathbf{N}_{tot}^{ex}=\frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \tag{7-2-4}$$

もし、$\mathbf{N}_{tot}^{ex}$ がゼロならば、$\mathbf{L}_{tot}$ は一定となる（**全角運動量の保存**）。内力は全角運動量を変化させることができない。

＜式(7-2-4)の証明＞

　式(7-2-2)の時間微分をとると、

$$\frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\dot{\mathbf{r}}_i\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i)+\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i\times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \tag{7-2-5}$$

ここで、$\dot{\mathbf{r}}_i\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i=m_i(\dot{\mathbf{r}}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i)=0$ であることを使った。

　最右辺の中の $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ は、式(7-1-2)より、

[1] 原点でなく、任意の点の周りについて考えるときは、$\mathbf{r}_i$ **はその点からi番目の質点へ向かう位置ベクトルとなる。**

$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_{j \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij}$ と書ける。これに $\mathbf{r}_i$ とのベクトル積を取ると、

$$\mathbf{r}_i \times m \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_{j \neq i}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) \qquad \text{(7-2-6)}$$

ここで、式(7-2-6)の中の和は j についての和なので $\mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{j \neq i}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij})$ とした[2]。

次に、式(7-2-5)の最右辺を計算するため、式(7-2-6)を i について和をとる。

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) \qquad \text{(7-2-7)}$$

右辺第１項は $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i^{ex} = \mathbf{N}_{tot}^{ex}$ （外力による力のモーメントの総和）である。後は、右辺の第２項 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij})$ （内力による力のモーメントの和）がゼロであることを示せば、式(7-2-4)を証明したことになる。

ここで、右辺の第２項を展開してみよう。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) = & (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13}) + \ldots + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1n}) \\ & +(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23}) + \ldots + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2n}) \qquad \text{(7-2-8)} \\ & +(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{32}) + \ldots + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{3n}) \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

となるが、右辺は $(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji})$ のようなペアで書き表す事ができる。すなわち、$[(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21})]$+$[(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13}) + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{31})]$ +[⋯]+⋯ のように。ところが作用反作用の法則より、$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ であるから、$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}$ となる。しかし、$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) // \mathbf{F}_{ij}$ なので、$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ となる。よって、すべてのペアがゼロになるので、結局、式(7-2-8)はゼロになる。こうして、内力による力のモーメントの総和がゼロになるので、式(7-2-4)が証明された。

7.3　重心に対する相対運動

前節までに質点系（N体問題）において以下のような式を導いてきた。

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad \text{(7-2-9)}$$

$$\frac{d\mathbf{P}_G}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \ , \ \frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \mathbf{F}_{tot}^{ex} \qquad (\mathbf{P}_G = \mathbf{P}_{tot}) \qquad \text{(7-2-10)}$$

$$\mathbf{N}_{tot}^{ex} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \qquad \text{(7-2-11)}$$

式(7-2-9)と(7-2-10)の最初の式は重心の運動方程式である。２体問題では重心の運動と相対運動を分離した。N体問題でも同様に、

質点系の運動＝重心の運動＋重心に対する相対運動　(7-2-12)

と表す事ができる。これを以下に示そう。

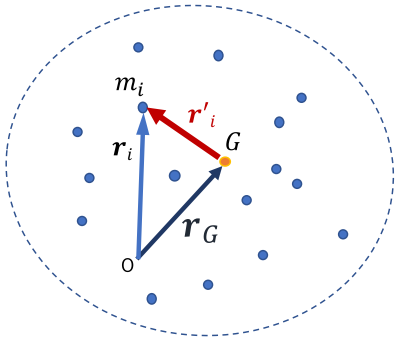
---

[2] もし、このことがわからなければ、展開した式(7-1-1)の左から$\mathbf{r}_i$をかけて見よ。

7-3-1 重心に対する相対ベクトルの定義　（重心座標系）

　　右図のように、質点系の重心 G から各質点に向かう「相対位置ベクトル」を $\mathbf{r}'_i$ のようにダッシュをつけて表す[3]ことにすると、

$$\mathbf{r}'_i \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G \qquad (i = 1 \ldots n) \qquad \text{(7-3-1)}$$



と定義できる[4]。ここで、$\mathbf{r}_i$ 、$\mathbf{r}_G$ は原点Oからそれぞれ各質点と重心まで引いた位置ベクトルである。$\mathbf{r}_G$ は 式(7-1-10)、あるいは 式(7-1-11)、$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$ で表される。

　　式(7-3-1)を時間微分する事で「重心に対する相対速度ベクトル $\mathbf{v}'_i$ 」を定義する。

$$\mathbf{v}'_i \equiv \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_G \qquad (i = 1 \ldots n) \qquad \text{(7-3-2)}$$

同様にして、「重心に対する相対運動量ベクトル $\mathbf{p}'_i$ 」を定義する。

$$\mathbf{p}'_i \equiv m_i \mathbf{v}'_i = m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \qquad (i = 1 \ldots n) \qquad \text{(7-3-3)}$$

7-3-2 質点系の全運動量

　　「質点系の全運動量」$\mathbf{P}_{tot}$ は重心の運動量とその周りの運動量の総和に分離できる事を示せる。すなわち、

$$\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_G + \mathbf{P}'_{tot} \,. \qquad \text{(7-3-4)}$$

ここで $\mathbf{P}_G$ ($= M\dot{\mathbf{r}}_G$) は「重心の運動量」、$\mathbf{P}'_{tot}$ は「重心に対する相対運動量の総和」 $\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i$ である。

＜式(7-3-4)の証明＞ 式(7-3-2)より、$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i$ なので、

$$\mathbf{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = M\dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{P}_G + \mathbf{P}'_{tot}. \qquad \text{(7-3-5)}$$

しかし、$\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_G$ である事はすでに7-1-1節の(7-1-13)式で示した。よって、$\mathbf{P}'_{tot} = 0$ であることがわかる。すなわち、重心から見た各質点の運動量の総和 $\mathbf{P}'_{tot}$ はゼロとなる。

$$\mathbf{P}'_{tot} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0 \qquad \text{(7-3-6)}$$

この(7-3-6)式は次節以降で頻繁に使う。

---

[3] この講義では重心に関する相対的な物理量には「ダッシュ」をつけて表す。

[4] 重心に対する相対位置ベクトルを考えることは「重心に乗っかって周りを見ている」ことに相当する。

7-3-3 質点系の全運動エネルギー

次に、系全体の運動エネルギー T は重心自体の運動エネルギー T_G と重心から見た質点の運動エネルギーの総和 T' に分離できることを示す。すなわち、

$$T = T_G + T' = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_G^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i'^2 \qquad (7\text{-}3\text{-}7)$$

ここで、右辺第１項は重心の運動エネルギー T_Gで、重心に全質量 M が集まって運動をすると考えた時の運動エネルギーである。右辺第２項は重心の周りの全運動エネルギー T' である。

＜式(7-3-7)の証明＞ 式(7-3-2)より、$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}_i'$ なので、

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\dot{\mathbf{r}}_G{}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_G\dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{r}}'_i{}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_G{}^2 + \sum_{i=1}^{n}(m_i\dot{\mathbf{r}}'_i)\dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}'_i{}^2 \qquad (7\text{-}3\text{-}8)$$

式(7-3-6)より最後の式の第２項目はゼロになるので、式(7-3-7)は証明された。

7-3-4 質点系の全角運動量

系の全角運動量 $\mathbf{L}_{tot}$ は**重心の角運動量（重心の原点に対する角運動量）**と**重心の周りの全角運動量**に分離できる事を示せる。それぞれの角運動量を以下のように定義する。

重心の角運動量 $\mathbf{L}_G \equiv \mathbf{r}_G \times \mathbf{P}_G = \mathbf{r}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G$ (7-3-9)

重心の周りの角運動量 $\mathbf{L}'_i \equiv \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i = \mathbf{r}'_i \times (m_i\dot{\mathbf{r}}'_i)$ (7-3-10)

重心の周りの全角運動量 $\mathbf{L}'_{tot} \equiv \sum_{i=1}^{n}\mathbf{L}'_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}'_i \times (m_i\dot{\mathbf{r}}'_i)$ (7-3-11)

これらの記号を使って、

$$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'_{tot}\ . \qquad (7\text{-}3\text{-}12)$$

＜式(7-3-12)の証明＞ 式(7-3-1)、(7-3-2) より、$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$、$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i$ なので、

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i \times m_i\dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n}[(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times m_i(\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i)] \qquad (7\text{-}3\text{-}13)$$

最後の式を展開して、

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_G \times m_i\dot{\mathbf{r}}_G) + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}'_i \times m_i\dot{\mathbf{r}}'_i) + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}'_i \times m_i\dot{\mathbf{r}}_G) + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_G \times m_i\dot{\mathbf{r}}'_i) \qquad (7\text{-}3\text{-}14)$$

右辺の第３項目の m_i を $\mathbf{r}'_i$ の前に置き、$\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}_G$ とすると、

$\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^{n}m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) = (\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_G) = (M\mathbf{r}_G - M\mathbf{r}_G) = 0$ となるので、第３項全体はゼロになる。

第４項 $\mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}'_i$ も式(7-3-6)を使うとゼロになる。式(7-3-14)の右辺の残りの第1項、第2項は

$\mathbf{L}_{tot} = (\mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_G) + \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}'_i \times m_i\dot{\mathbf{r}}'_i) = (\mathbf{r}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{L}'_i = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'_{tot}$ となり、式(7-3-12)が得られた。

7-3-5 質点系の力のモーメントの総和と回転運動の方程式

7-2節では、外力による力のモーメントの総和と全角運動量の間に、回転運動方程式(7-2-4)、$\mathbf{N}_{tot}^{ex} = \dfrac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt}$ が成り立つことを示した。$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'_{tot}$ (7-3-12)であるので、式(7-2-4)は、

$$\mathbf{N}_{tot}^{ex} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_G + \mathbf{L}'_{tot}) = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} + \frac{d\mathbf{L}'_{tot}}{dt} \qquad (7\text{-}3\text{-}15)$$

と書ける。ここで、

（重心に外力が作用した時の原点の周りの外力のモーメント）$\mathbf{N}_G \equiv \mathbf{r}_G \times \mathbf{F}_{tot}^{ex}$ (7-3-16)

（重心の周りの外力のモーメントの総和）$\mathbf{N}'_{tot} \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{ex})$ (7-3-17)

を定義すると、$\mathbf{N}_{tot}^{ex}$ は

$\mathbf{N}_{tot}^{ex} = \mathbf{N}_G + \mathbf{N}'_{tot}$ (7-3-18)　　のように分離できる。

また、回転の運動方程式は、

$$\mathbf{N}_{tot}^{ex} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \ \rightarrow\ \mathbf{N}_G = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt}, \quad \mathbf{N}'_{tot} = \frac{d\mathbf{L}'_{tot}}{dt} \qquad (7\text{-}3\text{-}19)$$

のように、「重心の回転の運動方程式」と「重心の周りの回転の運動方程式」に分離できる。外力が無い時は、全角運動量のみならず、重心の角運動量も重心の周りの全角運動量も保存することが上の式からわかる。

＜式(7-3-19)の証明＞　まず、矢印の右側の最初の式を求める。式(7-3-9)、(7-3-16)より、

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = (\dot{\mathbf{r}}_G \times \mathbf{P}_G) + (\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{P}}_G) = (\dot{\mathbf{r}}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G) + (\mathbf{r}_G \times M\ddot{\mathbf{r}}_G) = \mathbf{r}_G \times \mathbf{F}_{tot}^{ex} = \mathbf{N}_G \qquad (7\text{-}3\text{-}20)$$

（$(\dot{\mathbf{r}}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G) = 0$ であることに注意）

次に、(7-3-15)、(7-3-20)式より、$\dfrac{d\mathbf{L}'_{tot}}{dt} = \mathbf{N}_{tot}^{ex} - \dfrac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{N}_{tot}^{ex} - \mathbf{N}_G$ であるが、これは、

$$\frac{d\mathbf{L}'_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex}) - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_G \times \mathbf{F}_i^{ex})$$

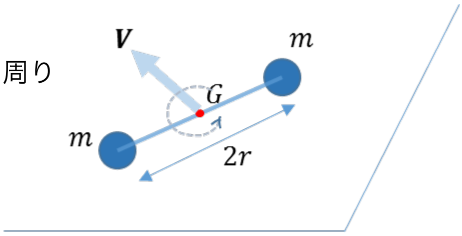
と書ける。
この右辺は更に、

$$\frac{d\mathbf{L}'_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \mathbf{F}_i^{ex}] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{ex}) = \mathbf{N}'_{tot} \qquad (7\text{-}3\text{-}21)$$

のように変形できるから、(7-3-19)式の矢印右の２つ目の式が得られる。

＜例題１＞ 滑らかな水平面に置かれたダンベル（亜鈴）の運動１

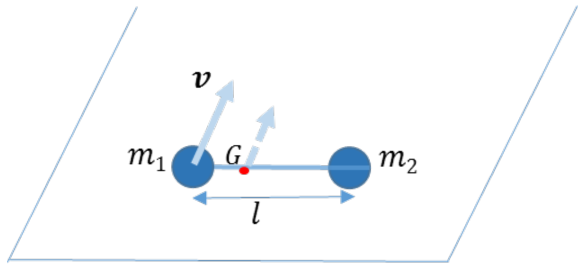
図のように、質量の無視できる長さ $2r$ の棒の両端に質量 m のおもりが付いていて[5]、重心 G の周りで角速度 ω で回転している。また、重心は速さ V で等速直線運動をしていたとする。この時のこの物体の運動エネルギー T を求めよ。



（解答例）全運動エネルギー T は重心の運動エネルギー $\frac{1}{2}(2m)V^2$ と重心の周りの運動エネルギーの和 $2\times\frac{1}{2}m(r\omega)^2$ で書けるので、$T=mV^2+mr^2\omega^2$

＜例題2＞ 滑らかな水平面に置かれたダンベル（亜鈴）の運動 2

図のように、質量の無視できる長さ l 棒の両端に質量 m_1 のおもり１と質量 m_2 のおもり２が付いている。今、おもり１に平面内で棒に垂直に撃力[6]を加えて速度 $\mathbf{v}$ を与えた。この後の亜鈴の運動を論ぜよ。



（解答例）**撃力が加わった時、位置は変化せず速度だけが変化すると考えて良い。すなわち、おもり１だけに初期速度$\mathbf{v}$を与えた、と言うことである**。この問題を重心の運動と重心の周りの運動に分離して考える。

(1) **重心の運動**　外力がゼロ（撃力は初期速度を与えるのみである）なので、重心の運動方程式は $M\ddot{\mathbf{r}}_G=0$　なので、重心の速度は $\dot{\mathbf{r}}_G=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_1\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}$ = 一定となる。ここで、おもり１の初期速度は $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}$、おもり2の初期速度は $\mathbf{v}_2=0$ なので、重心の初期速度は $\dot{\mathbf{r}}_G=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}$. しかし、重心の速度は一定なので、重心は$\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}$ で等速直線運動をする。

(2) 重心の周りの運動　外力がゼロなので、式(7-3-17)より重心の周りの外力のモーメント $\mathbf{N}'_{tot}=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}'_i\times\mathbf{F}_i^{ex})=0$. よって、式(7-3-19)は $\mathbf{N}'_{tot}=\frac{d\mathbf{L}'_{tot}}{dt}=0$ となるので、 重心の周りの全角運動量 $\mathbf{L}'_{tot}$ は保存する。ダンベルの重心の周りの角速度をω、おもり１と重心の距離をl_1、おもり2と重心の距離をl_2とすると、$|\mathbf{L}'_{tot}|=l_1m_1(l_1\omega)+l_2m_2(l_2\omega)=m_1l_1^2\omega+m_2l_2^2\omega=(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\omega$=一定。なので、常に角速度$\omega$は一定となる。 $\mathbf{L}'_{tot}$の向きは図の初期条件のとき、平面に垂直で下向きとなる。最初、おもり２は動かずに、おもり１のみ $v(=|\mathbf{v}|)$ で運動するから、$l\omega=v$ となる。よって、$\omega=v/l$.

(3) 結局、重心の周りに角速度一定 （$\omega=v/l$）で回転しながら、重心は$\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}$ で等速直線運動をする。

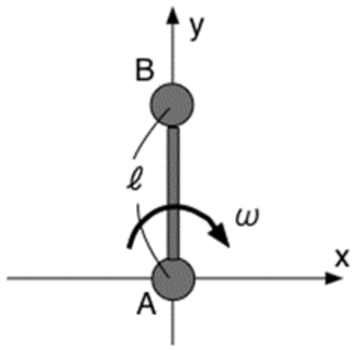
---

5 これを亜鈴とかダンベルと言う。

6 非常に短い時間Δtに、非常に大きな力$\mathbf{F}_0$が加わる時、これを撃力と言う。この時、運動量の変化はΔ$\mathbf{p}$=$\mathbf{F}_0$Δt.

演習11

1. 質量の無視できる長さ l の棒の両端に質量 m の物体A, B がついている。Aは原点に固定され、Bがそのまわりを角速度 ω で時計方向に回転している。図のように、Bが y 軸上に来た時、Aを自由にした。この時間を$t=0$とする。以下の設問に答えよ。ただし、重力は無視する。また、物体の大きさは十分小さいとする。



１）$t=0$ での重心の速度 $\mathbf{v}_G$ はいくらか。

２）$t=0$ での全運動量 $\mathbf{P}_{tot}$ はいくらか。

３）$t=0$ での原点のまわりの全角運動量 $\mathbf{L}_{tot}$ はいくらか。

４）$t=0$ での重心のまわりの全角運動量 $\mathbf{L}'_{tot}$ はいくらか。

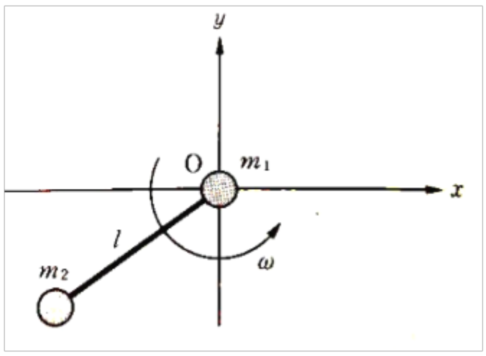
５）$t=0$ での重心の原点に関する全角運動量 $\mathbf{L}_G$ はいくらか。

６）$\mathbf{L}_{tot}=\mathbf{L}_G+\mathbf{L}'_{tot}$ を確かめよ。

７）この後、この亜鈴の重心の速度はいくらか。
８）また、重心のまわりの角速度 ω_G はいくらか。

９）$t=\pi/\omega$ における重心、およびBの位置の x, y 座標を求めよ。

2. 図のように質量 m_1, m_2 の質点１と質点２を重さの無い長さ l のひもで結んだダンベルを考える。質点１を持ってひもを角速度ω_0で回転させ m_2 が水平になった瞬間に m_1を放し、投げ上げた。ひもはたるむことがないとしてダンベルの運動を調べよう。（重力加速度をg とする）



１）投げ出す瞬間 $t=0$ のダンベルの重心のx 座標、y 座標 $X_G(0), Y_G(0)$を求めよ。
2）投げ出す瞬間 $t=0$ のダンベルの重心の速度のx 成分、y 成分 $V_X^G(0), V_Y^G(0)$ を求めよ。
3）投げ出した後、t 秒後の重心の位置 $X_G(t), Y_G(t)$ を求めよ。4）投げ出たし後、t 秒後の重心の速度 $V_X^G(t), V_Y^G(t)$を求めよ。5）重心のまわりの回転の角速度を求めよ。
6）質点１を持って回転しているときの運動エネルギー T を求めよ。
7）質点１を放した瞬間の、重心の運動エネルギーT_G, 重心の周りの回転の運動エネルギーT'を求めよ。
8）重心が最高点に達したときの位置エネルギーUを求めよ。
9) この問題に関してエネルギーの保存則を論ぜよ。